La cronotopía, antes y después de la geometría[1]

Carlos Eduardo Vasco Uribe[2]
Profesor de Educación Matemática
Programa de Doctorado Interinstitucional en Educación
Universidad del Valle en Cali
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá
Colombia

carlosevasco@gmail.com

Resumen[3]

Se hace un recuento histórico de las Geometrías iniciando con Pitágoras, en lo que se denomina "Programa de...", el cual refiere al matemático o lugar de procedencia de cada uno. Después de la teoría de la relatividad no se debería separar lo espacial de lo temporal y por esto debe hablarse de intervalos temporoespaciales. Por esta razón, se define el "cronotopo", que resalta la fusión del tiempo y el espacio en una nueva construcción mental y también se propone que la cronotopía sea el tratado de los aspectos lógicos y métricos del cronotopo y sus extensiones.

Se enfatiza la importancia de incluir en la educación matemática formal la cronotopía en la educación primaria, secundaria, universitaria y además en la investigación matemática, siguiendo el proceso de exploración, conceptualización, generación y puesta a prueba de conjeturas, argumentación y comprobación y terminar con la vuelta a la visualización-corporalización de las soluciones. Esta nueva visión de matemática se llamaría "Programa de Bogotá" y propone reforzar el pensamiento temporoespacial.

Palabras clave

Educación Matemática, cronotopía, pensamiento temporoespacial, geometría.

---

[1] Conferencia pronunciada en la Duodécima Conferencia Inter-Americana de Educación Matemática (XII CIAEM), Querétaro, México, Julio 16-19 de 2007. Una primera versión apareció en el año 2006 en: C. Ruiz et al. (Eds.), *Memorias: XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones - IV Encuentro de Aritmética* (Bogotá, Junio 23-24-25 de 2005, vol. 1, pp. 1-28). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

[2] Carlos Vasco es expresidente del Comité Interamericano de Educación Matemática (1999-2003).

[3] El resumen, las palabras clave y las key words fueron agregados por los editores.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2011. Año 6. Número 9. pp 77-91. Costa Rica

Abstract

The paper develops a historical account of a few famous geometry programs, starting with Pythagoras' Program or the Crotona Program. Other programs will be identified with the name of a person or of a city, depending on the mathematician who proposed it or the city where he lived or worked when the given program was proposed. The most famous is the Erlangen Program. After the theory of relativity, no geometry program should separate spatial from temporal aspects. Thus, instead of space regions or intervals and time lapses or intervals, we should rather think and speak of spatio-temporal intervals. For this reason, the central object of study for future geometry programs should be called "The Chronotope", a word that highlights the fusion of time and space in a new 4-dimensional construct. "Chronotopy" should be the corresponding name for the theoretical study of the logical and metric aspects of the Chronotope and its extensions to higher dimensions. Chronotopy spreads out into four intertwined disciplines: Chronology, Chronometry, Topology, and Topometry. Chronotopy should be included in primary, secondary, and tertiary Mathematics Education, and also as a central line of mathematical research, following the process of exploration, conceptualization, formulation, and testing of conjectures, reasoning and proving, then returning to visualization and embodiment of some aspects of the solutions. This new vision of what was called "Geometry" is called "the Bogota Program" and proposes to strengthen spatio-temporal thinking and reasoning from early education to advanced research endeavors.

Key words

Mathematics Education, Chronotope, Spatiotemporal Thought, Geometry.

1. Introducción

En la ciudad de Crotona, al sur de Italia, un legendario personaje venido del Asia Menor, después de conocer la agrimensura egipcia, establece una cofradía de maestros y aprendices de lo que entonces se empezó a llamar "ta mathematika", las cosas que había que aprender. Dentro de ellas, estaban, además de la astronomía y la música, la aritmética y la geometría, cuya traducción directa es precisamente "agri-mensura": la medida de los campos.

Podríamos decir que ese legendario personaje se propuso un primer programa para lo que hoy seguimos llamando "geometría": podríamos llamarlo "el Programa aritmo-geométrico de Pitágoras", o "Programa de Crotona", que pretendía estudiar los números figurados, triangulares, cuadrados, rectangulares oblongos, pentagonales, piramidales, cúbicos y prismáticos, ligando así inextricablemente la aritmética y la geometría.

En la ciudad de Alejandría en el siglo IV antes de nuestra Era, un paciente lector de manuscritos de las distintas escuelas matemáticas griegas, la eleática, la milesia, la pitagórica y la ateniense, se propuso otro programa ambicioso: unificar todo lo conocido entonces sobre la geometría en un tratado que alcanzó a 13 libros, algunos de los cuales comenzaban con definiciones, axiomas o nociones comunes y postulados que permitieran reconstruir por deducción lógica todas las proposiciones aceptadas en su época. Podríamos llamarlo “el Programa de sistematización geométrica de Euclides”, o “Programa de Alejandría”. Este programa se cultivó sin competencia durante casi 20 siglos, y se sigue cultivando hoy día en forma renovada después de la reformulación de los axiomas de la geometría por Hilbert a finales del siglo XIX.

En el siglo XVII se dieron dos revoluciones en la geometría. La primera y más estudiada en Occidente fue la revolución que produjo Descartes con la correspondencia entre ecuaciones algebraicas y lugares geométricos en el plano, con lo que nació la geometría analítica. El propósito de realizar este ambicioso objetivo podría llamarse “el Programa de geometría analítica de Descartes” o “Programa de Leiden”, por la ciudad en donde se publicó el apéndice geométrico al “Discurso del Método” en 1637.

Por la misma época ocurrió también otra revolución silenciosa, proveniente de la tradición no escrita de los constructores de catedrales y de los canteros y picapedreros franceses, la de la geometría proyectiva de Desargues, con su rico lenguaje botánico de árboles y ramas, sombras y puntos en el infinito. Esta propuesta, no comprendida en su tiempo, se podría llamar “el Programa de la geometría proyectiva de Desargues” o “Programa de Lyon”. Este programa fue continuado por Pascal y, más tarde, ya a finales del siglo XVIII y comienzos del XIX, por Monge, Gergonne, Poncelet y Chasles en Francia y por Möbius, Plücker y Jakob Steiner en Alemania. Éstos serían los cuatro primeros programas para lo que se suele llamar “geometría”. Pero hubo otros más (para más detalles sobre estos programas, se puede consultar muy provechosamente la segunda edición de la historia de las matemáticas de Carl Boyer, cuidadosamente editada por Uta Merzbach, Boyer & Merzbach, 1968/1989).

2. Gauss y la geometría diferencial

Después de Descartes y Desargues, fueron los trabajos de Gauss sobre la geometría de las superficies los que produjeron la gran revolución geométrica de comienzos del siglo XIX. Las curvaturas de las superficies no dependían ya de su inmersión en el espacio tridimensional ambiente, sino de mediciones de longitudes de caminos por operaciones diferenciales intrínsecas a la superficie misma. La geometría diferencial nació en 1827, de una vez tan hermosa como la Venus de Botticelli, con el trabajo de Gauss sobre teoría general de las superficies ("Allgemeine Flächentheorie"). A este estilo de trabajo podríamos llamarlo "el Programa de Geometría Diferencial al estilo de Gauss" o "Programa de Göttingen", continuado por Bernhard Riemann, quien escribió para su habilitación en Göttingen tres conferencias, de las cuales Gauss escogió para presentación pública la que versaba sobre geometría. Así leyó Riemann en 1854 su conferencia: "Sobre las hipótesis que subyacen a la geometría", en la que preparó el camino para la futura teoría de la relatividad general de Einstein.

3. Las geometrías de Lobatchevsky-Bolyai-Gauss

Con el fracaso de Lagrange para demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro y las nociones comunes, con el fallido trabajo de Gerolamo Saccheri en Pavía, quien creyó haberlo logrado, y con las consideraciones de Lambert, la geometría estaba lista para que el genio de Gauss, la visión de Lobatchevsky y el paciente trabajo de Bolyai produjeran hacia el año 1820, independientemente y casi simultáneamente, una geometría en la que no sólo existiera una paralela a una recta dada por cada punto exterior a ella, sino que todas las rectas pertenecientes a un haz de rectas que pasaran por un punto exterior a otra recta dejaran de cortarla. En honor a Gerolamo Saccheri, por la ciudad de Pavía, en donde vivió y enseñó, podemos llamar a este estilo de trabajo geométrico más allá y aun en contra de los axiomas de Euclides "el Programa de Geometría No-Euclidiana" o "Programa de Pavía".

3.1. Hamilton

En esa misma época, el escocés William Rowan Hamilton reformuló la mecánica clásica de Newton, D'Alembert y Lagrange, considerando –además del tiempo y de las tres coordenadas usuales de posición– también los momentos como tres nuevas dimensiones. Creó así nuevos espacios, hoy llamados "espacios de fase", y nuevas maneras de trabajar sobre ellos. En 1843 inventó los cuaternios, el primer cuerpo no conmutativo, al ocurrírsele agregar una dimensión real a las triplas que representaban las tres dimensiones del espacio, anticipándose a las necesidades del pensamiento espacio-temporal de la relatividad einsteiniana. Este estilo de trabajo anticipó el espacio-tiempo de Minkowski y las reformulaciones cuaterniónicas de la mecánica cuántica. Podríamos llamarlo "el Programa de la geometría multidimensional de Hamilton" o "Programa de Dublín". En el trabajo de Hamilton sitúo el comienzo de lo que llamaré "la cronotopía".

3.2. Grassmann

Por el mismo tiempo, en 1844, Hermann Grassmann inventó una manera de codificar el espacio por medio de su teoría generalizada de la extensión, la "Ausdehnungslehre", demasiado avanzada para su tiempo. El sueño de Leibnitz de un lenguaje simbólico configurado por caracteres semejantes a los caracteres chinos, llamado por él "Characteristica Universalis", tuvo un primer intento de realización en la mencionada teoría de la extensión o "Ausdehnungslehre" de Grassmann. A este estilo de trabajo geométrico abstracto lo podemos llamar "el Programa de la extensión generalizada de Grassmann" o "Programa de Stettin".

3.3. La topología combinatoria

La extraña invariancia de la suma del número de las caras y de los vértices menos el número de aristas de los poliedros, notada por Descartes y Euler y que hoy llamamos característica de Euler-Poincaré, llevó a la búsqueda de otros invariantes, como los números de Betti; a las triangulaciones de las superficies y a toda la topología combinatoria, la cual se convertiría con los trabajos de Poincaré y Brouwer, Spanier, Alexander, Eilenberg y MacLane en la topología algebraica actual. Por el lugar de nacimiento de la teoría de los grafos con la solución de Euler al problema de los puentes de Königsberg, podemos llamar a este estilo de hacer topología "el Programa topológico combinatorio" o "Programa de Königsberg".

3.4. El Programa de Erlangen

El más famoso de todos los programas de trabajo en geometría es el llamado "Programa de los grupos de transformaciones de Félix Klein" o "Programa de Erlangen". En 1872, Félix Klein propone como lección inaugural a su primera cátedra en la Universidad de Erlangen la conferencia "Observaciones comparativas sobre nuevas investigaciones geométricas", más conocida como "Programa de Erlangen".

En él utiliza la conceptualización de los grupos que con Sophus Lie había aprendido recientemente de Camille Jordan en París, y así logra elaborar una escala de geometrías que van desde la topología, como geometría correspondiente al grupo de las transformaciones continuas, a la proyectiva, la afín y la euclidiana, con subgrupos cada vez más limitados, como el de las proyectividades y el de las afinidades, hasta llegar al grupo de las homotecias y al de las transformaciones rígidas.

3.5. La teoría de la relatividad de Einstein

La utilización de múltiples herramientas de la geometría de Riemann, de las transformaciones, de las matrices y determinantes, de los vectores y tensores permitió a Einstein concretar en símbolos sus ideas revolucionarias sobre la conjunción del espacio y el tiempo en una variedad cuadridimensional. Minkowski y Reichenbach propusieron el tratamiento del espacio-tiempo con el tiempo como variable en una dimensión imaginaria ortogonal a las tres dimensiones del espacio. Yo prefiero utilizar los cuaternios como la mejor manera de tratar el espacio-tiempo, dejando el tiempo como variable real y las tres dimensiones del espacio como tres dimensiones imaginarias ortogonales entre sí y con la del tiempo. No deja de ser atractiva la asociación de ideas que despierte la consideración del tiempo como la dimensión real de los procesos, mientras que las tres dimensiones del espacio estarían más relacionadas con nuestra imaginación.

De la teoría de la relatividad surgieron nuevas geometrías, riemannianas y pseudo-riemannianas, reales y complejas, elípticas e hiperbólicas. Pero ello significó que el nombre mismo "geometría" se quedara ya corto para el tratamiento de esas nuevas construcciones mentales.

Los que prefieren las raíces griegas a las latinas han propuesto para el espacio-tiempo la palabra "cronotopo", para resaltar –con las raíces griegas "chronos" y "topos" unidas entre sí– la fusión del tiempo y el espacio en una nueva construcción mental.

Así como la etimología de la palabra "geometría" refiere al tratado de las mediciones de la Tierra (o de las tierras), o sea a la agrimensura, propongo que la cronotopía sea el tratado de los aspectos lógicos y métricos del cronotopo y sus extensiones.

3.6. El regreso de la intuición temporoespacial

Desde la didáctica de la geometría en las investigaciones en educación matemática, que querían devolver su lugar a la geometría en los programas escolares, se empezó a ver la dificultad de estudiar física, ingeniería y arquitectura en las universidades sin haber estudiado geometría en los colegios.

Un programa de matemáticas que se había reducido a la aritmética en los grados primero a séptimo; al álgebra en octavo y noveno: a la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo en los grados décimo y undécimo, no preparaba para los estudios de tecnologías, ingenierías, arquitectura o diseño. Ni siquiera para la física, que se reducía a lo que un profesor de décimo grado llamó "una matemática rara", en la cual se podían hacer aproximaciones, cancelaciones e hipótesis intolerables para el rigor del matemático puro.

Era tiempo de regresar a la intuición espacial y, por qué no, a la temporal. Mejor todavía, a la intuición temporoespacial, que con la visualización y la gestualización se va integrando más en la corporalización de que nos hablan Piaget (1946; 1948), Papert (1980), Lakoff y Núñez (2000).

4. Del pensamiento espacial o tópico al pensamiento temporoespacial o cronotópico

En la renovación curricular del Ministerio de Educación Nacional de Colombia que se inició en 1976, la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá nombró como asesor para el área de matemáticas al matemático genovés Carlo Federici, radicado en Colombia desde 1948. Federici había sido mi profesor de fundamentos de matemática, de lógica y de física y dirigió mi tesis de licenciatura sobre filosofía de la ciencia. Dos años después, la misma Universidad me nombró a mí para remplazarlo en esa asesoría, labor que continué hasta 1993. Como marco teórico para los programas de la renovación curricular propuse una reconceptualización de las matemáticas escolares desde el punto de vista de los sistemas.

Un sistema matemático tiene tres aspectos diferentes: sus universos de componentes o elementos, sus transformaciones u operaciones y sus relaciones o nexos entre los componentes. Los llamo el *sustrato* del sistema, la *dinámica* del sistema y la *estructura* del sistema.

En un artículo para la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que escribí en 1991, extendí estas ideas a todos los sistemas matemáticos. En particular, definí un sistema geométrico minimal como un sistema con al menos dos universos diferentes y al menos cuatro relaciones de incidencia, una interna a cada universo y dos que conectaran los elementos de uno de ellos con los del otro. A pesar del nombre "sistema geométrico", era claro que en ese tipo de sistemas minimales no había nada de métrico.

En Colombia no hay actualmente un programa oficial para las matemáticas escolares, sino unos lineamientos generales del área de matemáticas, que se refieren al desarrollo de cinco tipos de pensamiento diferentes, aunque por supuesto relacionados: el numérico, el espacial, el métrico, el variacional y el aleatorio o estocástico. Hoy propondría que se hablara del pensamiento temporoespacial, más bien que sólo del espacial.

Respecto al pensamiento temporal, recuerdo que el Dr. Carlo Federici ponía como ejercicio en sus cursos de fundamentos de matemáticas encontrar todas las relaciones posibles entre dos eventos en el tiempo. Tenemos que acudir a la espacialización de lo temporal para hacerlo, pero es muy informativo ver cuántas relaciones posibles hay entre sólo dos eventos que ocurren en un tiempo unidimensional.

A través de ese ejercicio se ejercita el pensamiento temporal y se distingue más fácilmente lo que parece una sutileza: el intervalo temporal vacío entre los instantes inicial y final de un evento o proceso y el intervalo lleno o lapso de tiempo que dura ese evento o proceso.

Hay que notar que la palabra "intervalo" ya trae implícito lo espacial, pues se refiere al valle entre montañas: "inter-vallum"; en lo espacial, la palabra "intervalo" tiene también la ambigüedad de referirse a veces a la distancia entre dos picos de esas montañas y a veces al valle que ocupa esa distancia, o al camino más o menos tortuoso que va de un pico a otro por el valle.

Estos ejercicios de pensamiento temporal hacen claramente diferentes al menos cuatro significados distintos de la palabra "tiempo": el tiempo como estructura general de los procesos; el tiempo como una magnitud para los intervalos o lapsos temporales "llenos", más precisamente llamada "duración", ya sea considerada como cantidad de duración sin medirla todavía, o como medida numérica de esa cantidad; el tiempo como otra magnitud para lo vacío, llamada "intervalación", o para decirlo con otra espacialización implícita, la "distancia temporal" entre dos de esos mojones temporales sin medirla todavía, o como medida numérica de esa cantidad y, finalmente, el tiempo como artificio de ubicación de los instantes, eventos y procesos a partir de mojones, relojes y números. Aquí se nota que la palabra "ubicación temporal" encierra también una disonancia, pues en latín, "ubi" significa "en dónde", espacialmente hablando, no "cuándo". Se debería pues hablar de "cuandicación" en vez de "ubicación temporal".

Después de la teoría de la relatividad no se debería separar más lo espacial de lo temporal, y habría que hablar de intervalos temporoespaciales, sin olvidar que un intervalo temporoespacial lleno congela los movimientos de los cuerpos en el espacio en ciertas especies de trayectorias, lombrices o gusanos cuadridimensionales que codifican lo que para nosotros es el movimiento de un cuerpo.

Este pensamiento temporoespacial es incorporado, corporalizado, inscrito en nuestro ser corporal y en nuestra movilidad, en los sentidos exteroceptivos e interoceptivos, especialmente en el aparato coclear, que se ha llamado "el sentido vestibular", el cual nos indica la dirección vertical con respecto al campo gravitacional local y nos alerta sobre los cambios de velocidad. Es importante notar que el sentido vestibular no indica la ubicación espacial, ni la velocidad, sino la aceleración. No es pues un sentido "crónico" ni "tópico", sino claramente "cronotópico".

En un nuevo programa para el futuro de lo que solemos llamar "geometría', la primera propuesta es que el comienzo del trabajo privilegiado para la invención y la reflexión matemática debería ser siempre ese mundo corporalizado de la intuición temporoespacial, lo que completa el cuadro de la visualización con la gestualidad y la corporalización. En esa visualización-corporalización se ubica (y se cuandica) el chispazo de la conjetura, el crisol de la conceptualización, el artificio gráfico o gestual para la expresión y la discusión entre colegas, así como la satisfacción estética del problema resuelto.

Al quedar tan limitada la palabra "geometría", que con su alusión a la Tierra y a la agrimensura deja por fuera lo temporal y limita demasiado lo espacial, es necesario introducir la palabra "cronotopía" y el adjetivo "cronotópico" para señalar, como lo insinuamos arriba, con la unión raíces griegas "chronos" y "topos" los aspectos temporales y espaciales en su unidad.

5. Lo *-lógico y lo *-métrico (la *-logía y la *-metría)

Ya he insinuado en el recuento histórico una tercera propuesta: tener en cuenta la distinción clave para lo que podría ser un nuevo programa para esa cronotopía que solemos llamar "geometría". Se trata de la distinción entre los aspectos lógicos y los aspectos métricos de los modelos y teorías cronotópicos.

Los aspectos lógicos son anteriores a y necesarios para los aspectos métricos, pero los métricos no son necesarios para los lógicos. Más aún, el pasar demasiado pronto a los aspectos métricos puede y suele obstaculizar el desarrollo de los aspectos lógicos, de suyo más importantes.

Uno de los problemas con la palabra "geometría" es que incluye de una vez los aspectos lógicos y los métricos en el nombre de la disciplina, pero no podemos evitar esa inclusión con el uso de la palabra "geología", pues ya está reservada para las ciencias de la Tierra.

Volvamos al ejemplo del pensamiento temporal al estilo Federici. Una cosa es el trabajo de encontrar las relaciones temporales entre dos eventos, que sería analizar uno de los aspectos lógicos de la estructura del tiempo, o sea "su *-logía", en este caso "la cronología", y otra cosa sería tratar de metrizar la duración de uno de esos eventos o la intervalación entre el final de un evento y el comienzo de otro posterior, que sería analizar aspectos métricos de la estructura del tiempo, o sea "su *-metría", este caso "la cronometría".

En el pensamiento espacial, una cosa es el trabajo de producir, comparar, clasificar y analizar las propiedades de las líneas y de las figuras puntuales, lineales, regionales, espaciales y ojalá temporoespaciales, que sería analizar uno de los aspectos lógicos de la estructura del espacio, o sea "su *-logía", en este caso "la topología" en el nuevo sentido más amplio, y otra cosa sería tratar de metrizar la distancia entre dos de esos puntos o la longitud de una de esas líneas o el área de una de esas figuras regionales, etc., que sería analizar aspectos métricos de la estructura del espacio, o sea "su *-metría", en este caso "la topometría". La cronotopía se desdobla pues en la cronología y la cronometría por el lado temporal y en la topología y la topometría por el lado espacial. Tenemos pues la ecuación que me sirve como definición de la cronotopía:

Cronología + Topología + Cronometría + Topometría = Cronotopía

6. Lo *-lógico y las reducciones proposicional y conceptual

6.1. Proposiciones y conceptos vs. fórmulas y términos

La *-logía de la cronología y de la topología –en el sentido amplio en que la propongo– no se refiere únicamente al estadio final de pulimento de una teoría con una axiomatización y un despliegue hipotético-deductivo, por importante que este estadio sea. La *-logía está ya desde la visualización y la corporalización de los modelos mentales e imaginados a partir de las experiencias diarias, desde la aprehensión que Raymond Duval llama "operatoria" de lo experimentado o imaginado.

Las primeras proposiciones matemáticas de Tales, Pitágoras y demás geómetras griegos antes de Euclides no pueden llamarse propiamente "teoremas", pues no se deducían de unos axiomas o postulados formulados explícitamente. Eran relaciones matemáticas, conjeturas plausibles derivadas de distintas formas de visualización, gestualización, dibujo o construcción mecánica. No se podía pues propiamente demostrarlas, sino mostrarlas con el dibujo y el gesto, el lenguaje y la deixis. Se podían explicar, relacionar con otras y a lo más se podría argumentar a favor o en contra con razones intuitivas, de autoridad, o con ejemplos e inducciones empíricas.

Paralelamente, los términos utilizados en esas proposiciones, relaciones o conjeturas no estaban definidos cuidadosamente, sino que se utilizaban tal como circulaban en los lenguajes de la construcción, la agricultura y la agrimensura, el comercio, el arte o la religión. La introducción de términos técnicos y las definiciones explícitas de los mismos tuvieron que venir mucho después.

En un nuevo programa para lo que ahora llamamos "geometría", ese juego de la *-logía del cronotopo se extendería de la definición de los términos a la de los predicados y los operadores, no sólo para llegar a los primitivos no definidos sino para llegar a las distintas posibles definiciones en discursos escritos explícitamente formulados y regulados por distintos tipos de sintaxis, de semántica y de pragmática.

7. Lo *-métrico y el regreso de las magnitudes y las cantidades

El éxito del programa analítico de Descartes para lo que se suele llamar "geometría" se debió principalmente a la posibilidad de cerrar un cálculo de segmentos por medio de la multiplicación y la división, las cuales producían otros segmentos. Esto permitió reducir todas las magnitudes absolutas y relativas unidimensionales a la longitud de un segmento de recta. Recuérdese que en Euclides la multiplicación de segmentos producía un rectángulo y que su división producía una razón, que no era ni rectángulo, ni segmento, ni siquiera número.

La física de los siglos siguientes siguió tratando separadamente las magnitudes y las cantidades de cada magnitud, pero en las matemáticas el éxito de la geometría analítica hizo que se distrajera la atención que antes se prestaba a las distintas magnitudes y al tratamiento de las cantidades de las mismas. Sobrevivieron sólo las distancias y las longitudes, confundidas muchas veces, y las áreas y los volúmenes, confundidos con las cabidas y las capacidades y reducidos a productos de dos o tres longitudes.

Ya a comienzos del siglo XX Max Wertheimer (1945) investigó las nociones de área de los estudiantes de secundaria y media y encontró que no tenían dicha noción, sino que identificaban las áreas con ciertas fórmulas para calcular las áreas de triángulos, rectángulos y círculos. Cien años después podríamos encontrar exactamente la misma situación (Fandiño Pinilla y D'Amore, 2006). Todavía hoy consideraríamos a un estudiante como geométricamente competente si se sabe esas tres fórmulas de áreas, si no confunde el área con el perímetro y si puede convertir metros cuadrados a centímetros cuadrados; lo consideraríamos un genio matemático en potencia si se sabe la fórmula del área de la esfera, si no confunde el área de una bola con su volumen, y si cae en la cuenta de que no se pueden convertir metros cuadrados a centímetros cúbicos.

En un futuro programa para la cronotopía volveríamos al estudio fino de las magnitudes y las cantidades que propuso incansable e infructuosamente el Dr. Carlo Federici durante 50 años. Empezaríamos por distinguir el objeto cronotópico de sus características metrizables; para cada una de ellas precisaríamos la magnitud apropiada, distinguiríamos entre la cantidad respectiva como objeto métrico todavía anumérico, o sea sin asignarle todavía un número como medida, y luego le asignaríamos las distintas medidas numéricas de esa cantidad según procedimientos y sistemas métricos diferentes, hasta llegar al número rotulado o “número con letrero” que nos enseñó Carlo Federici como distinto del número natural, pues se trataría de un operador sobre una cantidad unitaria.

Así, en las futuras cronometría y topometría se tratarán precisamente las magnitudes, sus cantidades anuméricas y sus medidas numéricas, las unidades como cantidades anuméricas a las que se les asignará el número 1 y no se confundirán los patrones de medida con las unidades. El patrón de medida es un artefacto físico que permita un procedimiento, mientras que la unidad es una cantidad construída mentalmente que no tiene materia ni forma. Por ejemplo, un centímetro cuadrado no es un cuadrito de un centímetro de lado; eso puede ser un patrón para medir áreas por yuxtaposición, pero no es una unidad. El centímetro cuadrado como unidad no tiene materialidad de papel ni de plástico ni tiene forma cuadrada. Una unidad de área (o de volumen) no tiene forma.

En mis talleres de topometría he utilizado como unidades el centímetro triangular y el centímetro circular, que se podrían realizar en patrones como triángulos equiláteros de un centímetro de lado o como círculos de un centímetro de radio. Pero las unidades respectivas no tienen forma circular, ni triangular ni cuadrada. Más aún, si se hace el ejercicio topométrico, resulta que la fórmula para el área de un triángulo equilátero de lado L resulta ser L^2 en centímetros triangulares, y la fórmula para el área de un círculo de radio R resulta ser R^2 en centímetros circulares. No es raro pues que el área de un cuadrado de lado L resulte ser L^2 en centímetros cuadrados.

Así podríamos extender nuestras exploraciones cronotópicas partiendo de tomar una dimensión espacial como longitud y la otra como duración, como se hace en física y en cálculo, cuando se cambia del plano cartesiano (x, y) al plano (t, x), que si lo miramos con cuidado, ya es cronotópico. Luego podemos avanzar con la imaginación tridimensional, tomando dos dimensiones como espaciales y la tercera como temporal, para poder asegurarnos en vaivén que las formulaciones del cronotopo o espacio-tiempo de 4 dimensiones siguen teniendo asidero imaginativo. Pero no sólo se trata de asegurar un punto de partida para la comprensión de las teorías que superan los modelos mentales cronotópicos, ni un refugio seguro para regresar periódicamente de los viajes hiperespaciales a los que nos lleva la teoría digitalizada. Se trata también de salvaguardar la fuente de las conjeturas intuitivas, de los “insights” o chispazos iniciales de los que parten las ideas peregrinas, las relaciones insólitas o las transformaciones descabelladas que podrán luego matematizarse en formas nuevas. Sólo así podremos crear también nuevas matemáticas y desarrollar las existentes por nuevos caminos.

8. La cronotopía en la física

La cronotopía relativista ya no puede llamarse “geometría”, pues desborda la Tierra y pretende abarcar todo el universo, incluída la dimensión temporal, desde el “Big Bang” hasta la muerte térmica del universo o su muerte por el “Big Crunch”, según la que llegue primero.

Un libro tan completo y profundo como el de Thomas Frankel (1977/2004), llamado “La geometría de la física”, quedaría mucho mejor titulado “La cronotopía de la física”.

Conceptualmente hablando, la cronotopía permite concebir directamente las vecindades cronotópicas del aparato detector y el fenómeno detectado con dimensiones temporoespaciales suficientemente amplias para albergar espacialmente tanto al dispositivo como al fenómeno, y lo suficientemente duraderas temporalmente para permitir un acoplamiento metaestable que permita producir una lectura. Allí viven las relaciones de incertidumbre de Heisenberg.

Ese es el mundo cronotópico que vislumbró Einstein cuando imaginaba que viajaba montado en la parte delantera de una locomotora que iba acelerando más allá de la velocidad del sonido, cuando ya él dejaría de oír el silbato de la locomotora, hasta llegar a la velocidad de la luz. Allí se hizo la pregunta crucial que transformaría la física del siglo XX: ¿Qué pasaba con el chorro de luz que emitía el faro delantero de la locomotora?

9. La cronotopía en la educación y en la investigación matemática

En la educación matemática el programa para la cronotopía indica la necesidad de superar la enseñanza puramente aritmética de la educación primaria, en la que lo que llamamos “geometría” se reduce al reconocimiento de figuras, para iniciar desde el comienzo con la cronotopía sintónica con el cuerpo de niños y niñas, con la visualización y el cultivo de la imaginación temporoespacial y los juegos cronológicos y topológicos de las definiciones nocionales y la exploración de relaciones y transformaciones, y para avanzar en los juegos cronométricos y topométricos con las cantidades anuméricas de magnitudes diferentes hasta llegar a los números rotulados o con letrero.

Así se puede aprovechar la exploración libre y guiada, la generación y puesta a prueba de conjeturas y aun la invención o reinvención de conceptos y relaciones cronotópicas y cronológicas con la ayuda de los programas de computación electrónica.

En la secundaria se invertiría la relación entre el álgebra y lo que llamamos "geometría", pues ahora serían las conjeturas y problemas de la cronotopía los que exigirían aprender o inventar notaciones que se compararían con el álgebra de las hojas electrónicas computacionales y con el álgebra usual del bachillerato, ya no como disciplina de las matemáticas conceptuales sino como una herramienta más para la expresión, la comunicación, la exploración y la puesta a prueba de las conjeturas originadas en la visualización-corporalización cronotópica y la solución de sus problemas lógicos y métricos. La argumentación a favor o en contra de las conjeturas, las demostraciones y los contraejemplos y la argumentación a favor o en contra de los argumentos dados remplazarían los procedimientos rígidos de tratamiento simbólico en el tablero o el cuaderno. Los ejercicios de álgebra se dejarían como entretenimiento para aprender a manejar los sistemas de tratamiento simbólico de fórmulas y no como objeto directo de enseñanza de procedimientos y algoritmos sin sentido. Más bien que seguir redactando y proponiendo problemas como ejercicios, los profesores y estudiantes produciríamos problemas como acertijos y desafíos intrínsecos a la cronotopía, o relacionados con las demás áreas curriculares dentro del trabajo por proyectos integrados de varias áreas.

En la educación media y posmedia, sea técnica, tecnológica, profesional o académica, la geometría analítica, la trigonometría y el cálculo dejarían de ser el filtro y la tortura para expulsar estudiantes del sistema educativo, para animarlos más bien a continuar el ciclo de explorar, conceptualizar, conjeturar, poner a prueba las conjeturas, argumentar a favor o en contra, producir, visualizar, corporalizar y comprobar soluciones a problemas cronotópicos relacionados con la producción, la profesión o la disciplina académica escogida.

En la investigación matemática no se procedería de manera diferente a la que se iniciaría desde la primaria, la secundaria, la media y la universitaria. Es el mismo ciclo que parte de la visualización-corporalización cronotópica, que sigue el proceso de exploración, conceptualización, generación y puesta a prueba de conjeturas, argumentación y comprobación, y termina con la vuelta a la visualización-corporalización de las soluciones. La diferencia estaría en el rigor de la argumentación, en la densidad de la conceptualización y en el formalismo de la expresión. Pero si queremos crear matemáticas nuevas, no podemos esperar a comenzar a hacerlo en los posgrados, sino que tenemos que comenzar desde niños y volver a hacernos niños para iniciar y concluir esos ciclos de investigación matemática.

El futuro programa para la que se suele llamar "geometría" parte pues de achicarnos como niños para poder pasar por esa humilde puerta de entrada al universo de las ciencias, las artes y las matemáticas que es nuestra imaginación temporoespacial, corporalizada en nuestros nervios, músculos y huesos (o tal vez sólo en nuestro sistema nervioso central), para ejercitar el pensamiento cronotópico al comienzo de cualquier aventurado viaje matemático, y nos propone regresar repetidamente a ese lugar privilegiado después de todos y cada uno de los periplos teóricos más abstractos y refinados, para encontrar allí y la satisfacción profunda del "insight", ese súbito "chispazo" que nos da la intuición cronotópica de la coincidencia de un modelo con una teoría y para encontrar también allí la fuente de las nuevas conjeturas y el punto de partida para otro emocionante periplo matemático.

Nuestra puerta de entrada al universo es ciertamente pequeña: es un ínfimo gusanito cuadridimensional cuyo hipervolumen es, a lo más, el medio metro cúbico de nuestro cuerpo (y tal vez sólo la milésima de metro cúbico de nuestro cerebro) multiplicado por la breve duración de nuestra vida.

En una frase en la que resuena la voz del Premio Nobel colombiano, Gabriel García Márquez, este nuevo programa para lo que solemos llamar "geometría", o sea para la cronotopía, al que podríamos llamar "Programa de Querétaro" o "Programa de Bogotá", nos propone no desperdiciar ni una sola de las continuas oportunidades de vivir esa maravillosa experiencia del pensamiento cronotópico "desde la cuna hasta la tumba".

Referencias

Abbott, E. A. (1884/2006). *Flatland: A romance of many dimensions* (Oxford World's Classics). Oxford/New York: Oxford University Press. Disponible en el URL http://www.geom.uiuc.edu/~banchoff/Flatland/

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1968/1989). *A history of mathematics* (2nd. ed.). New York, etc.: John Wiley & Sons.

Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. (Strumenti per la didattica della matematica 1). Gardolo, Trento: Centro Studi Erickson.

Frankel, T. (1977/2004). *The geometry of physics: An introduction* (2nd ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Piaget, J. (1946). *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France. (Traducción al castellano: *El desarrollo de la noción del tiempo en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica, 1992).

Piaget, J. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking*. New York: Harper.